

# נוסחאון מתמטיקה

## 5 יחידות לימוד

**תוכנית חדשה**

### אלגברה

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

השורשים:

$$(a \neq 0) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

משוואה ריבועית:

### סדרות:

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	כלל נסיגה:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	איבר n-י:
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad q \neq 1$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	סכום:
$S = \frac{a_1}{1 - q}$ סכום סדרה אינסופית שסכומה מתכנס:	$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	

חזקות:  $(b \neq 0, a \neq 0)$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	

לוגריתמים (לפי אילוצי תחום ההגדרה):

$\log_a(a^b) = b$	$a^{\log_a x} = x$	$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$
$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$

גדילה ודעיכה: הכמות לאחר t יחידות זמן:  $f(t) = f(0) \cdot q^t$  כאשר q מקדם הגדילה / הדעיכה ליחידת זמן t

### הסתברות

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית:}$$

נוסחת ברנולי - ההסתברות ל-k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות להצלחה היא p:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**טריגונומטרייה וגאומטרייה**

**זהויות:**

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

(R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש)  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$  **משפט הסינוסים:**

( $\gamma$  היא הזווית הכלואה בין הצלעות a ו- b)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma$  **משפט הקוסינוסים:**

( $\alpha$  היא הזווית הכלואה בין הצלעות b ו- c)  $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$  **שטח משולש:**

( $\beta$  ו-  $\gamma$  זוויות ליד הצלע a)  $S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}$

(R – רדיוס)  $P = 2\pi \cdot R$  **היקף מעגל:**  $S = \pi \cdot R^2$  **שטח עיגול:**

(R – רדיוס)  $S = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2$  **שטח גזרה של  $\alpha$  רדיאנים:**  $\ell = \alpha \cdot R$  **אורך קשת של  $\alpha$  רדיאנים:**

**חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי**

**נגזרות:**

$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$ (t ממשי)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  נגזרת של מכפלת פונקציות:

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$  נגזרת של מנת פונקציות:

$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$  נגזרת של פונקצייה מורכבת:

$u'(x)$  היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

$f'(u)$  היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

**אינטגרלים:**

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1, \text{ ממשי } t)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

אם  $F(x)$  היא פונקצייה קדומה של הפונקצייה  $f(x)$  אז:  $\int f(mx + b) dx = \frac{1}{m} F(mx + b) + C$  ( $m \neq 0$ )  
 $\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$

**גאומטרייה אנליטית**

**קו ישר:**

השיפוע  $m$  של ישר העובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_2, y_2)$ :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  ( $x_1 \neq x_2$ )

משוואת ישר ששיפועו  $m$ , העובר בנקודה  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי הנקודה  $C$  המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע

שקצותיו הם  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  ביחס  $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$ :  $\left( \frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right)$

שני ישרים, בעלי שיפועים  $m_1, m_2$  מאונכים זה לזה אם ורק אם:  $m_1 \cdot m_2 = -1$

המרחק  $d$  בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו- $B(x_2, y_2)$ :  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

המרחק  $d$  בין הנקודה  $(x_0, y_0)$  ובין הישר  $Ax + By + C = 0$ :  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

המרחק  $d$  בין הישרים המקבילים  $Ax + By + C_1 = 0$  ו- $Ax + By + C_2 = 0$ :  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

**מעגל:**

משוואת המשיק למעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  בנקודה  $(x_0, y_0)$  על המעגל:  $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

**פרבולה:**

משוואת המשיק לפרבולה  $y^2 = 2px$  בנקודה  $(x_0, y_0)$  על הפרבולה:  $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

מדרוך של פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :  $x = -\frac{p}{2}$

מוקד של פרבולה שמשוואתה  $y^2 = 2px$ :  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

	מרחק המוקד מהראשית	משוואה	
	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	<b>אליפסה</b>
משוואות האסימפטוטות של היפרבולה: $y = \pm \frac{b}{a}x$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<b>היפרבולה</b>

### מספרים מרוכבים

מכפלה בהצגה קוטבית של המספרים המרוכבים  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  ו-  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$[R(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

משפט דה־מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{R} \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

פתרונות המשוואה  $z^n = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

### גופים במרחב

מנסרה וגליל: נפח:  $V = B \cdot h$  (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

פירמידה וחרוט: נפח:  $V = \frac{B \cdot h}{3}$  (B – שטח הבסיס, h – גובה הגוף)

חרוט ישר: שטח מעטפת:  $M = \pi R \ell$  (R – רדיוס העיגול,  $\ell$  – הקו היוצר)

כדור: נפח:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  (R – רדיוס הכדור)

שטח הפנים:  $M = 4\pi R^2$  (R – רדיוס הכדור)

### וקטורים

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

אורך של וקטור  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

מכפלה סקלרית של שני וקטורים  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ו-  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$  :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

המכפלה הסקלרית כאשר  $\alpha$  היא הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  :

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

המרחק של נקודה  $P(x_1, y_1, z_1)$  ממישור  $ax + by + cz + d = 0$  :

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

המרחק בין מישורים מקבילים  $ax + by + cz + d_1 = 0$  ו-  $ax + by + cz + d_2 = 0$  :

$$\sin \beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

הזווית  $\beta$  בין הישר  $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$  למישור  $ax + by + cz + d = 0$  כאשר  $\underline{n} = (a, b, c)$  :

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2|}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|}$$

הזווית  $\alpha$  בין המישורים  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  כאשר  $\underline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  ו-  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  כאשר  $\underline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  :